数理解析研究所講究録
第 1672 巻 2010 年 76-93

Large Deviations for Additive Functionals with Jumps

土田 兼治 [1]

鳥羽商船高等専門学校

概 要

Gärtner-Ellis の定理は確率過程に対する大偏差原理を証明するための一つの手段である．本定理を用いて，連続型加法的汎関数，不連続型加法的汎関数の大偏差原理は証明されている．本論ではその手法を応用して，連続，不連続を両方持つような加法的汎関数の大偏差原理を証明した．

AMS 2000 Mathematics Subject Classification: 60J45, 60J40, 35J10.

Key Words: 大偏差原理，対称安定過程，加法的汎関数，加藤クラス

1 Introduction

本論では対称安定過程から生成される加法的汎関数の大偏差原理について論じる．ここでいう加法的汎関数とは，対称安定過程に対する Dirichlet 形式から生成される滑らかな測度 μ に Revuz 対応する正の連続加法的汎関数 A_t^μ と，有界な非負の Borel 関数 $F(x,y)$ で，任意の x について $F(x,x)=0$ となるような関数から生成される正の不連続加法的汎関数 A_t^F の和で表されるものである．つまり，考察対象である加法的汎関数 $A_t^{\mu+F}$ は，

$$A_t^{\mu+F} = A_t^\mu + A_t^F$$

と表される．このような加法的汎関数は有界変動でかつ準左連続性をもつことが知られている．本論では，μ と F にある仮定を課したときに，$A_t^{\mu+F}$ に対する加法的汎関数の大偏差原理を Gärtner-Ellis の定理 ([7]) を用いて証明した．

Gärtner-Ellis の定理は大偏差原理が成り立つための十分条件を与えている．この定理を用いて確率過程の大偏差原理を証明するためには次の二点を示さなければならない．
(I) 対数モーメント母関数の存在
(II) 対数モーメント母関数の微分可能性

(I) については，連続型加法的汎関数の場合において，竹田 ([14], [17], [18]) が広いクラスの対称 Markov 過程に対して，そして測度 μ が Green-tight な加藤クラスに属しているとき

[1] 科学研究費補助金　若手研究 (B) (No.21740109). tsuchida@toba-cmt.ac.jp

(一部の Markov 過程に対しては加藤クラスだけの仮定で) 証明されている. 竹田-田原 [19] において対称安定過程に対する不連続な加法的汎関数の対数モーメント母関数の存在が証明された. また, 田原 [24] は連続と不連続の両方をもつ加法的汎関数に対して対数モーメント母関数の存在を示した. 以上一連の結果はその証明においては, Donsker-Varadhan 型大偏差原理を用いて Schrödinger 型作用素の L^p-ノルムにおける p に関する独立性を示すことによって, 対数モーメント母関数が存在するだけではなく, それがその Schrödinger 型作用素のスペクトルの上限になっていることまでが示されている. (I) についてだけでも確率論だけではなく, 解析学においても興味深い問題である.

このように対数モーメント母関数の存在については, ある種の仮定の下で示されているので, 次の問題は (II) のその微分可能性である. 微分可能性の議論をするときは, 対数モーメント母関数をスペクトル関数と呼ぶことにする. これは (I) より, 対数モーメント母関数がスペクトル表現される, つまり対応する Schrödinger 作用素の二次形式で表現できることからきている. (II) については, 竹田 [16] が基礎となる Markov 過程が 1, 2 次元のブラウン運動に対して, その微分可能性を証明した. [20] において, 我々はその結果を 3, 4 次元のブラウン運動まで拡張した. よく知られているように, 1, 2 次元のブラウン運動は再帰的であり, 対称 Markov 過程の再帰性に関する大島の不等式を用いることにより, [16] ではスペクトル関数の微分可能性を示しているが, [20] では, 大島の結果をある種の非再帰的な対称 Markov 過程に拡張して証明した. ここまでの結果においてはブラウン運動の生成作用素がラプラシアンになること, つまり局所的な作用素になることに着目して, 偏微分方程式の方法などを援用して証明した. また, 以下の一般化の場合においても重要となるが, 次元が 3, 4 と制限されるのは, 対応する調和関数が $L^2(\mathbb{R}^d)$ に含まれないことが微分可能性の証明において必要となるためである. [21] においては, 基礎となる Markov 過程が対称 α-安定過程に対して $d \leq 2\alpha$ の場合に証明した. 次元の制限は上述したとおりである. 対称 α-安定過程の生成作用素は $\Delta^{\alpha/2} := -(-\Delta)^{\alpha/2}$ であり, $\alpha = 2$ の場合はブラウン運動になるので, [20] で解決されていたが, $0 < \alpha < 2$ の場合においては, 生成作用素が擬微分作用素となり問題が難しくなる. その理由について言及する. (II) を証明するとき, スペクトル関数が固有値になるときは対応する Schrödinger 作用素が優臨界的となり, 解析的摂動論を用いて微分可能性が示される. 解析的摂動論は一般の作用素で成立するので問題はないが, 作用素が臨界的になるとき, つまり Green 関数は存在しないが, 調和関数は存在するときに, Doob の h-変換を用いて再帰的な対称 Markov 過程を構成し, [16] の方法を修正して証明するという手順を踏む. 局所的な作用素の場合は調和関数の構成は偏微分方程式論の結果を援用したのであるが, 非局所的な作用素の場合については, その調和関数をどのように定義するのかがまず問題となる. そこで我々は確率論的に調和関数を定義し, その調和関数を用いて同様の議論を行うが, 調和関数の性質 (正則性, 有界性など) を証明するのが大変困難であった. そこでは gaugeability という劣臨界的と同値な概念を用いて, 本問題に適切な調和関数を構成することに成功した. 連続型

Feynman-Kac 汎関数に対する gaugeability の判定法は竹田 [15] によって確立されており，その結果を用いていることにも注意したい．また対称安定過程の場合は Green 関数の形が明確にわかっているので，それを用いて調和関数の正則性を示していることにも注意したい．さらに $d > 2\alpha$ の場合にはスペクトル関数が微分不可能になることも証明した．しかし，Gärtner-Ellis の定理はあくまでも大偏差原理が成り立つための十分条件を与えているに過ぎず，微分不可能だからといって大偏差原理が成り立たないと言い切れるわけではないことに注意されたい．

[25] において我々は基礎となる Markov 過程が相対論的 α-安定過程に対して (II) を証明した．この場合の生成作用素は $m - (\Delta + m^{2/\alpha})^{\alpha/2}$, $m > 0$, $0 < \alpha < 2$ であり，やはり非局所的なものとなる．$\alpha = 1$ の場合には相対論的自由ハミルトニアンと呼ばれ，Carmona-Masteur-Simon [3] によって，それに対応する熱核，加藤クラスなどの研究が行われているが，$0 < \alpha < 2$ と一般化した場合も近年研究対象となっており，そのポテンシャル論的な性質や熱核の研究などが行われ始めている．$\alpha = 1$ の場合は熱核が複雑ではあるが計算されており，そこから Green 関数を計算することができるが，一般の α の場合には計算ができない．対称安定過程の場合は Green 関数の形からその調和関数の正則性を示したが，この場合はその評価しかわからないために，違う方法をとって調和関数の正則性を証明した．また興味深いのはその成り立つ次元なのであるが，実は α には関係なく $d \leq 4$ となり，これはブラウン運動の場合の結果と一致する．これは相対論的安定過程の熱核が指数的減衰をしているというブラウン運動に似た挙動を持つためである．

さて，ここまでは連続的な加法的汎関数に対する対数モーメント母関数の微分可能性についての結果を述べてきたが次に不連続な場合の微分可能性について述べる．この場合は [22] において，基礎となる Markov 過程が対称 α-安定過程 $(0 < \alpha < 2)$ で，$F \in \mathcal{A}_\infty$ というクラスのときに $d \leq 2\alpha$ において (II) を証明した．これは，Girsanov 変換によって連続的でない Feynman-Kac 半群を連続的な Feynman-Kac 半群に帰着し，gaugeability の新たな判定方法を導出し，[21] の議論に帰着させて証明した．不連続な Feynman-Kac 汎関数の gaugeability の判定法は，Chen [5] が確立していたが，その判定方法では微分可能性の証明において不都合な点 (変分問題で inf を考えるものの中にポテンシャル項がある) があり，それを回避するために新たな判定方法を導いた．けれでも証明において，Chen の判定法も用いることになるので，本質的にどちらが優れているかという問題ではなく，相互にうまく用いていくことが重要なのである．詳しくは [22] を参照していただきたい．

本論では上でも述べたように，連続と不連続を両方含む加法的汎関数の大偏差原理を導いた．基礎となるアイデアは [21] と [22] にある．これを融合しながら議論を進めていくが，重要な点は，Girsanov 変換して連続的な Feynman-Kac 半群にしたときに，そこにさらに連続的な加法的汎関数を加えていくことにある．関数のクラス $\mathcal{A}_\infty$(以下の定義 2.1 参照) は測度のクラスの $\mathcal{K}_\infty$ に対応する．$\mathcal{K}_\infty$ は和に関して閉じているので，その性質を用いてこれまでの結果を使いながら加法的汎関数の大偏差原理を証明した．つまり，主定

理は以下である.

定理 1.1. $\mathbf{M}$ が対称 α-安定過程 $(0 < \alpha \leq 2)$ で $d \leq \alpha$ のとき, $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ かつ $F \in \mathcal{J}_\infty$, $\alpha < d \leq 2\alpha$ のとき, $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ かつ $F \in \mathcal{A}_\infty$ のとき, $A_t^{\mu+F}$ は大偏差原理を満たす:
(I) 任意の閉集合 $K \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log P_x \left(\frac{A_t^{\mu+F}}{t} \in K \right) \leq -\inf_{\lambda\in F} I(\lambda).$$

(II) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log P_x \left(\frac{A_t^{\mu+F}}{t} \in G \right) \geq -\inf_{\lambda\in G} I(\lambda),$$

が成り立つ. ここでレート関数 $I(\lambda)$ は対数モーメント母関数 (スペクトル関数) $C(\theta)$ の *Fenchel-Legendre* 変換

$$I(\lambda) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\{\theta\lambda - C(\theta)\}$$

である.

上でも述べたとおり, 本論の議論は [21], [22] に沿って進めているので, 重複する部分はできる限り証明を述べるのを避け, 事実だけを述べることとした. 詳しくは, [21], [22] を参照されたい.

最後に本論の構成を述べる. 第 2 節では対称安定過程の準備, 結果を得るために必要な測度のクラス, 関数のクラスの定義を行う. また証明で必要となる Poincaré タイプの不等式について紹介する. 第 3 節では加法的汎関数について述べる. 連続な場合と不連続な場合について言及し, その和から作られる Feynman-Kac 半群, Schrödinger 形式について述べる. 第 4 節では, 対数モーメント母関数の存在についての結果の紹介とスペクトル関数の関係とその性質についてまとめる. 第 5 節では, 調和関数の構成について述べる. この部分は主に [21] と [22] の結果を引用している. 第 6 節ではスペクトル関数 (対数モーメント母関数) の微分可能性とと大偏差原理について述べる. まず, 証明に必要な大島の不等式とその拡張を紹介し, スペクトル関数の微分可能性を証明する. そして最後に加法的汎関数の大偏差原理が得られることを述べる. 最後の第 7 節では簡単に本論に関するこれからの問題について列挙した. 本論では定数に番号は付していないので, その時々によって定数の値は変わることに注意されたい.

2 準備

$\mathbf{M} = (P_x, X_t)$ をオーダーが α $(0 < \alpha \leq 2)$ の対称安定過程とし, $\mathcal{H} = 1/2\Delta^\alpha := -1/2(-\Delta)^{\alpha/2}$ を $\mathbf{M}$ に対する生成作用素とする. 本論では, 連続な加法的汎関数も考えて

いるので，$\alpha = 2$，つまりブラウン運動の場合も含める．また $p(t,x,y)$ を $\mathbf{M}$ の推移確率密度とする．$\alpha < d$，すなわち，対称安定過程が非再帰的であるとき，$\mathbf{M}$ の Green 関数 $G(x,y)$ が定義され，すべての $x, y \in \mathbb{R}^d$ かつ $x \neq y$ に対して，

$$G(x,y) = \int_0^\infty p(t,x,y)dt = c(d,\alpha)|x-y|^{\alpha-d} < \infty$$

ここで，$c(d,\alpha) = 2^{-\alpha}\pi^{-d/2}\Gamma\left(\frac{d-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ である．$G_\beta(x,y)$ を β-ポテンシャル核

$$G_\beta(x,y) = \int_0^\infty e^{-\beta t}p(t,x,y)dt \quad \beta \geq 0$$

とする．もちろん $G(x,y) = G_0(x,y)$ である．

測度 μ に対して，μ の β-ポテンシャルを

$$G_\beta\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_\beta(x,y)\mu(dy)$$

によって定義し，$\alpha < d$ のときは，$G\mu = G_0\mu$ とおく．

対称安定過程の Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は以下のようになることが知られている．

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,v) &= \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))J(x,y)dxdy,\\ \mathcal{F} &= \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \mathcal{E}(u,u) < \infty\right\},\end{aligned}$$

ここで，$\triangle = \{(x,x) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\}$ であり，

$$J(x,y) = \frac{1}{2}\frac{K(d,\alpha)}{|x-y|^{d+\alpha}}, \quad K(d,\alpha) = \frac{\alpha\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right)}{2^{1-\alpha}\pi^{d/2}\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

である．$(\mathcal{F}_e,\mathcal{E})$ を Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に関する拡張化された Dirichlet 空間とする．すべての $u \in \mathcal{F}_e$ に対して，その準連続修正が存在することが知られているが[2]，本論を通して，$\mathcal{F}_e$ に属する関数は既に準連続修正をとっているものとする．

さて，ここで本論で考えたい加法的汎関数を生成する測度，関数についての定義を与える．

定義 2.1. (1) (i) $\mathbb{R}^d$ 上の正のラドン測度 μ が加藤クラスに属するとは，

$$\lim_{\beta\to\infty}\|G_\beta\mu\|_\infty = 0$$

が成り立つときにいう．加藤クラスを $\mathcal{K}$ で表す．

(ii) 測度 $\mu \in \mathcal{K}$ がクラス $\mathcal{K}_\infty$ に属するとは，

$$\begin{cases}\lim\limits_{R\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}\displaystyle\int_{|y|>R} G(x,y)\mu(dy) = 0 & d > \alpha\\ \lim\limits_{R\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}\displaystyle\int_{|y|\geq R} G_1(x,y)\mu(dy) = 0 & d \leq \alpha\end{cases}$$

[2][8] Theorem 2.1.7

(iii) $d > \alpha$ と仮定する．測度 μ がクラス $\mathcal{S}_\infty$ に属するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，あるコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ と正定数 δ が存在し，

$$\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle}\int_{\mathbb{R}^d\setminus K}\frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)}\mu(dy)\le\epsilon$$

かつ，$\mu(B) < \delta$ である任意の可測集合 $B \subset K$ に対して，

$$\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle}\int_{B}\frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)}\mu(dy)\le\epsilon$$

が成り立つときにいう．

(2) (i) $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上で有界な対称 $Borel$ 関数 $F(x,y)$ で，任意の $x\in\mathbb{R}^d$ に対して $F(x,x)=0$ なる関数 $F(x,y)$ がクラス $\mathcal{J}_\infty$ に属するとは，

$$\mu_{|F|} := \left(\int_{\mathbb{R}^d}|F(x,y)|N(x,y)dy\right)dx\in\mathcal{K}_\infty$$

であるときにいう．ここで，$N(x,y)=2J(x,y)$ である．

(ii) $d>\alpha$ を仮定する．関数 $F\in\mathcal{J}_\infty$ がクラス $\mathcal{A}_\infty$ に属するとは，任意の $\epsilon>0$ に対し，ある $\mu_{|F|}$-測度有限の $Borel$ 集合 K と正定数 δ が存在し，任意の可測集合 $B\subset K$ でかつ $\mu_{|F|}(B)<\delta$ であるものに対し，

$$\sup_{(x,w)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle}\iint_{((K\setminus B)\times(K\setminus B))^c}\frac{G(x,y)|F(y,z)|G(z,w)}{G(x,w)}N(x,y)dzdy\le\epsilon$$

が成り立つときにいう．

(iii) $d>\alpha$ を仮定する．有界かつ対称な $Borel$ 関数 F がクラス $\mathcal{A}_2$ に属するとは，$F\in\mathcal{A}_\infty$ かつ $\mu_{|F|}\in\mathcal{S}_\infty$ が成り立つときにいう．

注意 2.1. 対称安定過程で $d>\alpha$ のときは，$3G$-不等式

$$\frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)}\le C(G(x,y)+G(y,z))\quad (C \text{ は正定数})$$

により，$\mathcal{A}_2=\mathcal{A}_\infty$ である．

次の加藤クラスの測度に対する Poincaré の不等式は，スペクトル関数の微分可能性を証明するために重要である．

定理 2.2 ([13])**.** $\mu\in\mathcal{K}$ とする．そのとき，任意の $\beta\ge 0$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d}u(x)^2\mu(dx)\le\|G_\beta\mu\|_\infty\cdot\mathcal{E}_\beta(u,u),\quad u\in\mathcal{F}\tag{2.1}$$

が成り立つ．ここで，$\mathcal{E}_\beta(u,u)=\mathcal{E}(u,u)+\beta\int_{\mathbb{R}^d}u^2dx$ である．

この定理の系として，

系 2.3. $\mu \in \mathcal{K}$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある正定数 $M(\epsilon)$ が存在し，

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)^2 \mu(dx) \le \epsilon \mathcal{E}(u,u) + M(\epsilon) \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^2 dx$$

が成り立つ．

3 加法的汎関数

μ が正の加藤クラスの測度であるとき，μ はその対称安定過程に対する滑らかな測度となることが知られている．[8] により，滑らかな測度には，正の連続加法的汎関数 A_t^μ が以下の対応で一対一に対応する[3]：任意の $f \in \mathcal{B}^+$ と γ-超過関数 h に対し，

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x) f(x) \mu(dx) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} E_x \left(\int_0^t f(X_s) dA_s^\mu \right) h(x) dx.$$

μ が加藤クラスの符号付き測度，つまり，$\mu = \mu^+ - \mu^- \in \mathcal{K} - \mathcal{K}$ のときには，

$$A_t^\mu = A_t^{\mu^+} - A_t^{\mu^-}$$

と定義する．

さて，$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の対角線上で 0 になるような有界な非負の Borel 関数 $F(x,y)$ に対して，

$$A_t^F = \sum_{0 < s \le t} F(X_{s-}, X_s)$$

とおくと，基礎となる対称 Markov 過程がジャンプを持つ場合，これは飛躍型加法的汎関数となる．本論では，$F \ge 0$ の場合しか考えない．

本尾[4]により，準左連続で有界変動な加法的汎関数 A_t は，

$$A_t = A_t^\mu + A_t^F$$

の形でしか表せないことが示されている．

定義 2.1 において現れた $N(x,y)$ と t の組 $(N(x,y), t)$ を M に関する Lévy system という．そのとき，Lévy system の性質から，

$$E_x[A_t^F] = E_x \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} F(X_s, y) N(X_s, y) dy ds \right]$$

[3] これを Revuz 対応という．

[4] [26]

となることが知られている．そして，[22] の議論に従うと，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} E_x[A_\infty^F] < \infty$$

であることがわかる．

$F \in \mathcal{J}_\infty$ に対して，対称 Dirichlet 形式 $\mathcal{E}_F$ を

$$\mathcal{E}_F(u,u) := \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle}(u(x)-u(y))^2 e^{F(x,y)}N(x,y)dxdy,\ u\in\mathcal{F} \tag{3.1}$$

によって定義する．$F_1 := e^F - 1$ とおくとき，対称二次形式 $\mathcal{E}^F$ を

$$\mathcal{E}^{\mu+F}(u,u) := \mathcal{E}_F(u,u) - \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu - \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu_{F_1},\ u\in\mathcal{F} \tag{3.2}$$

と定義する．$(\mathcal{E}^{\mu+F},\mathcal{F})$ は下半有界な閉対称形式であり，

$$\mathcal{E}^{\mu+F}(u,u) = \mathcal{E}(u,u) - \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu - \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle} u(x)u(y)F_1(x,y)N(x,y)dxdy,\ u\in\mathcal{F}$$

とも表現できる．詳しくは [22] を参照されたい．

$p_t^{\mu+F}$ を $\mathcal{H}^{\mu+F}$ によって生成される L^2-半群とする．すなわち，$p_t^{\mu+F} = \exp(t\mathcal{H}^{\mu+F})$ であり，それに対応する Feynman-Kac 半群

$$p_t^{\mu+F}f(x) = E_x[\exp(A_t^{\mu+F})f(X_t)]$$

によって表される．[24] において次の性質が示されている．

定理 3.1 ([24]). (i) $p_t^{\mu+F}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の強連続対称半群であり，$p_t^{\mu+F}$ に対応する閉形式は $(\mathcal{E}^{\mu+F},\mathcal{F})$ に一致する．
(ii) 定数 c と $\kappa(\mu,F)$ が存在して，

$$\|p_t^{\mu+F}\|_{p,p} \le ce^{\kappa(\mu,F)},\quad 1\le\forall p\le\infty,\ t>0$$

が成り立つ．ここで $\|\ \|_{p,p}$ は $L^p(\mathbb{R}^d)$ から $L^p(\mathbb{R}^d)$ への作用素ノルムを表す．
(iii) 任意の $f\in\mathcal{B}_b$ に対して，$p_t^{\mu+F}$ は $\mathbb{R}^d$ 上連続．
(iv) $p^{\mu+F}$ は $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上連続な対称積分核 $p^{\mu+F}(t,x,y)$ を持つ．

以下の 3 つの二次形式を定義する．

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\mu(u,u) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^2 d\mu \\
\mathcal{B}_F(u,u) &= \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle} u(x)u(y)F(x,y)J(x,y)dxdy \\
\mathcal{G}_{\mu+F}(u,u) &= \mathcal{A}_\mu(u,u) + \mathcal{B}_F(u,u).
\end{aligned}$$

補題 3.2. $\mathcal{B}_F(u,u) \leq \mathcal{A}_{\mu_F}(u,u)$ である．

証明: $F(x,y)$ の対称性と Schwarz の不等式より，

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_F(u,u) &= \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle} u(x)u(y)F(x,y)J(x,y)dxdy \\
&\leq \left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle} u(x)^2F(x,y)N(x,y)dxdy\right)^{1/2}\left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle} u(y)^2F(x,y)N(x,y)dxdy\right)^{1/2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^2 d\mu_F = \mathcal{A}_{\mu_F}
\end{aligned}$$

□

4 対数モーメント母関数とスペクトル関数

本論ではこの $A_t^{\mu+F}$ に対する大偏差原理を考察するのが目的である．そのために Gärter-Ellis の定理を用いるが，この定理を用いるために必要な関数を定義しておく．

定義 4.1. $\mu + F \in \mathcal{K}_\infty + \mathcal{J}_\infty$ に対して，

$$\Lambda(\theta) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}E_x(\exp(\theta A_t^{\mu+F})), \quad \theta\in\mathbb{R}$$

とおく．この $\Lambda(\theta)$ を $A_t^{\mu+F}$ に関する対数モーメント母関数という．

定理 4.1 ([21], [22]). 任意の $\theta\in\mathbb{R}$ に対して，$\Lambda(\theta) < \infty$ であり，θ に関して凸である．

ここで，Gärtner-Ellis の定理を本論で使う形で紹介する．

定理 4.2 (Gärtner-Ellis の定理). (P, Z_t) を $\mathbb{R}$ 上の 0 から出発する確率過程とする．
(I) 任意の閉集合 $K\subset\mathbb{R}$ に対して，

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log P\left(\frac{A_t}{t}\in K\right) \leq -\inf_{\lambda\in K}\mathcal{I}(\lambda).$$

(II) $\Lambda(\theta)$ が θ に関して微分可能であるとき，任意の開集合 $G\subset\mathbb{R}$ に対して，

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log P\left(\frac{A_t}{t}\in G\right) \geq -\inf_{\lambda\in G} I(\lambda)$$

が成り立つ．ここで，$I(\lambda)$ は $\Lambda(\theta)$ の *Fenchel-Legendre* 変換：

$$I(\lambda) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}(\theta\lambda - \Lambda(\theta))$$

である．

上の定理より，対数モーメント母関数の微分可能性を示せば，加法的汎関数 $A_t^{\mu+F} = A_t^\mu + A_t^F$ の大偏差原理が証明できることになるが，対数モーメント母関数の存在自体が自明ではない．

その点を解決したのが，竹田，田原 [19]，[24] である．また彼らの結果より，対数モーメント母関数の別表現が得られ，その形から微分可能性を証明することが可能となる．次の結果は田原 [24] の結果である．

定理 4.3. $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ とし，$F \in \mathcal{J}_\infty$ とする．そのとき，

$$C(\theta) = -\inf\left\{\mathcal{E}(u,u) - \mathcal{G}_{\theta\mu+(\theta F)_1}(u,u) : u \in \mathcal{F},\ \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^2 dx = 1\right\} \tag{4.1}$$

が成り立つ．

上式は形式的に Schrödinger 型作用素

$$\mathcal{H}^{\theta(F+\mu)} f(x) = -\Delta^{\alpha/2} f(x) - \theta\mu f(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\left(e^{\theta F(x,y)} - 1\right) N(x,y)dy \tag{4.2}$$

のスペクトルの上限となっている．(4.2) において，第 1 項が Schrödinger 作用素の主要項 ((擬) 微分項)，第 2 項が連続な加法的汎関数に対応するポテンシャル項，第 3 項が不連続な加法的汎関数に対応するジャンプ型ポテンシャル項である．もし μ がルベーグ測度に関して絶対連続であるときは，そのラドン・ニコディム導関数を $V(x)$ とおくとき，$\mu(dx) = V(x)dx$ となり，これは掛け算作用素となることを注意しておく．

ここで，$C(\theta)$ の性質を述べておく．以下の結果は [22] の §3 と同様に示せるので証明は省略する．

定理 4.4. 関数 $C(\theta)$ は凸関数であり，以下のような形をしている．

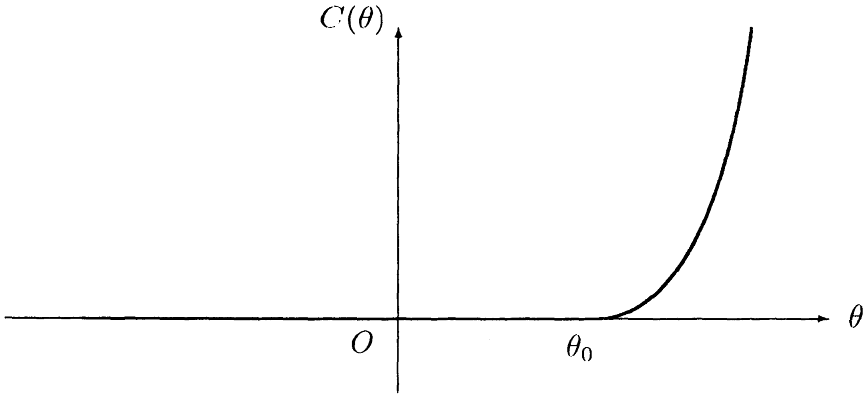

図　スペクトル関数

ここで，

$$\theta_0 = \inf\{\theta > 0 : C(\theta) > 0\}$$

とおいた．

注意 4.5. 図では $C(\theta)$ が微分可能な形をしているが，これはある仮定のもとで定理6.3で示される．

5 $\mathcal{H}^{\theta_0(\mu+F)}$-調和関数の構成

本節においても，[21]，[22] の議論と同様に考えることができる．
まず，調和関数の定義をする．

定義 5.1. $\mathbb{R}^d$ 上の有界で細連続な関数 h が $\mathcal{H}^{\mu+F}$-調和であるとは，任意の相対コンパクトな領域 $D \subset \mathbb{R}^d$ に対して，

$$h(x) = E_x[\exp(A^{\mu+F}_{\tau_D})h(X_{\tau_D})], \quad x \in D$$

が成り立つときにいう．ここで，$\tau_D = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$ である．

以下では，$\nu = \mu + \mu_{F_1}$ とおく．

補題 5.1. 以下の 2 つの主張は同値である：
(i) $\inf\{\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) : u \in \mathcal{F}_e,\ \mathcal{G}_{\mu,F_1}(u,u) = 1\} = 1$,
(ii) $\inf\{\mathcal{E}_F(v,v) : u \in \mathcal{F}_e,\ \mathcal{A}_\nu(v,v) = 1\} = 1$.
証明: [[22] Lemma 4.3, Lemma 4.4, Lemma 4.6] において，$\theta\mu$ をポテンシャル項に付け加えれば同様に証明できる．

□

さらに，u_0 と v_0 をそれぞれ変分問題 (i) と (ii) の最小を与えるものとすると，u_0 は $v_0/\sqrt{\mathcal{B}_{F_1}(v_0,v_0)}$ に等しい．

上の補題は Schrödinger 型作用素 $\mathcal{H}^{\mu+F}$ の臨界性の性質を与えるものである．(i)，(ii) の値が 1 よりも大きければ劣臨界的 (Green 関数が存在) になるが，ここでは，劣臨界的ではないが，$\mathcal{F}_e$ から $L^2(\nu)$ への埋め込みがコンパクト ([21]) であることを用いて，(ii) の inf を達する関数でその修正をとると正連続かつ有界な関数を見つけることができる．詳しくは [21]，[22] を参照されたい．よって，上の補題から (i) の inf を達する関数を見つけることができて，それを h とおくとき，h を $\mathcal{H}^{(\mu+F)}$-調和関数と呼ぶことにする．この状況を臨界的であるという．

また先ほど定義した θ_0 に対して，[22, Lemma 4.3, Lemma 4.6] によって，次のことがわかる．

命題 5.2. $\mathcal{H}^{\theta_0(\mu+F)}$ は臨界的である

よって，$\mathcal{H}^{\theta_0(\mu+F)}$-調和関数 h を構成することができる．

このhを用いて，Feynman-Kac 半群 $p_t^{\theta_0(\mu+F)}$ に Doob の h-変換を施す．すなわち，

$$p_t^{\theta_0(\mu-F),h} f(x) = \frac{1}{h(x)} p_t^{\theta_0(\mu+F)}(h(x)f(x))$$

である．そのとき，$p_t^{\theta_0(\mu+F),h}$ は対称 Markov 半群になり，これに対応する対象 Markov 過程 $\mathbf{M}^h$ を構成することができる．

また，h-変換したときの不変測度は h^2dx なので，$h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ のときには，$\mathbf{M}^h$ は正再帰的となり，$h \notin L^2(\mathbb{R}^d)$ のときには，$\mathbf{M}^h$ は零再帰的となるよって，前者の場合の $\mathcal{H}^{\theta_0(\mu+F)}$ を正臨界的とよび，後者の場合を零臨界的とよぶことにする．

gaugeability の判定条件 [23] と Harnack の不等式 [2] を用いることにより，$\mathcal{H}^{\theta_0(\mu+F)}$-調和関数 h は，

$$\frac{c}{|x|^{d-\alpha}} \leq h(x) \leq \frac{C}{|x|^{d-\alpha}}, \quad |x| > 1$$

を満たすことがわかり，$\mathcal{H}^{\theta_0(\mu+F)}$ は，$d \leq 2\alpha$ のとき零臨界的であり，$d > 2\alpha$ のとき正臨界的であることが簡単な計算からわかる．

6 スペクトル関数の微分可能性と大偏差原理

この節では，スペクトル関数の微分可能性の証明の解説をする．詳細は [20]，[21]，[22] を参照されたい．スペクトル関数の微分可能性を証明するために重要となるのが，次の大島 [10] によって示された不等式である．

定理 6.1 ([10]). $\mathbf{M} = (P_x, X_t)$ を *Harris* の意味で再帰的な対称 *Markov* 過程であるとする．ここで *Harris* の意味で再帰的であるとは，$f \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\int_0^\infty f(X_t)dt = \infty, \quad P_x\text{-}a.s$$

であるときをいう．$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $\mathbf{M}$ に対応する *Dirichlet* 形式とする．そのとき，$g > 0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ と $C > 0$ と $\psi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ かつ $\int_{\mathbb{R}^d} \psi dx = 1$ となるものが存在して，$u \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u - L(u)| dx \leq C\mathcal{E}(u,u)^{1/2}$$

が成り立つ．ここで，

$$L(u) = \int_{\mathbb{R}^d} u\psi dx$$

である．

我々は，[21] においてこの定理を以下のように臨界的な Schrödinger 作用素から生成される二次形式に拡張した．ここでは，さらに不連続な加法的汎関数も加えた場合に拡張するが，証明は全く同じなので省略する．ポイントは Doob の h-変換により生成された対称 Markov 過程に対して定理 6.1 を適用し，後は簡単な計算をすることである．

定理 6.2 ([21]). ある関数 $g > 0 \in L^1(h^2dx)$ と $C > 0$ と関数 $\psi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ で $\int_{\mathbb{R}^d} \psi h^2 dx = 1$ となるものが存在して，$u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^{\theta_0(\mu+F)})$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| u(x) - h(x)L\left(\frac{u}{h}\right) \right| g(x)h(x)dx \leq C\mathcal{E}^{\theta_0(\mu+F)}(u,u)^{1/2} \tag{6.1}$$

が成り立つ．ここで，

$$L(u) = \int_{\mathbb{R}^d} u\psi h^2 dx$$

である．

では，スペクトル関数の微分可能性の結果を紹介する．

定理 6.3. $d \leq \alpha$ のとき，$\mu \in \mathcal{K}_\infty$ かつ $F \in \mathcal{J}_\infty$，$\alpha < d \leq 2\alpha$ のとき，$\mu \in \mathcal{K}_\infty$ かつ $F \in J_\infty$ とする．そのとき，スペクトル関数 $C(\theta)$ のときは微分可能である．

注意 6.4. 証明法は [21]，[22] に準ずるが，ここでは連続部分と不連続部分の両方の部分を持つ $\mu + F$ に関するスペクトル関数の微分可能性である部分が新しい結果であることを注意しておく．

証明: $\alpha < d$ の場合だけ考える．$d \leq \alpha$ のときは [16] と同様に証明できる．まず $\theta > \theta_0$ のときは，[18] と同様の方法で $-C(\theta)$ が $\mathcal{H}^{\theta(\mu+F)}$ の有限多重度の固有値になることがわかる．よって，解析的摂動論 [9, Chapter VII] によって $C(\theta)$ は微分可能である．さらに，$C(\theta)$ は凸関数で，$\theta \leq \theta_0$ では $C(\theta) \equiv 0$ であったので，我々が証明すべきことは，$\theta = \theta_0$ における $C(\theta)$ の右微分係数が 0 になることである．つまり，$\theta_n \downarrow \theta_0$ となるある数列 $\{\theta_n\}$ が存在して，$n \to \infty$ のとき，$dC(\theta_n)/d\theta \downarrow 0$ となることを示せばよい．

さて，[9, p.405 (4.44)] より，$\theta > \theta_0$ に対しては，

$$\frac{dC}{d\theta}(\theta) = \mathcal{B}_F(u_\theta, u_\theta) + \mathcal{A}_\mu(u_\theta, u_\theta), \tag{6.2}$$

が成り立つ．ここで，u_θ は固有値 $-C(\theta)$ に関する $L^2(dx)$-正規化された固有関数である．すなわち，

$$-C(\theta) = \mathcal{E}^{\theta(\mu+F)}(u_\theta, u_\theta) = -\mathcal{B}_{(\theta F)_1}(u_\theta, u_\theta) - \mathcal{A}_{\theta\mu}(u_\theta, u_\theta) + \mathcal{E}(u_\theta, u_\theta) \tag{6.3}$$

$$0 \leq \frac{dC}{d\theta}(\theta) = \mathcal{B}_F(u_\theta, u_\theta) + \mathcal{A}_\mu(u_\theta, u_\theta) = \mathcal{A}_{\mu_F}(u_\theta, u_\theta) + \mathcal{A}_\mu(u_\theta, u_\theta) = \int_{\mathbb{R}^d} u_\theta^2 d(\mu + \mu_F)$$

よって，$\nu = \mu + \mu_F$ とおけば，

$$\lim_{\theta \downarrow \theta_0} \int_{\mathbb{R}^d} u_\theta^2 d\nu = 0$$

を示せば十分である．

よって，補題 3.2，(6.3)，そして $\theta = \theta_0$ の近傍で成り立つ不等式 $e^{\theta F} - 1 \le C\theta F$ (C は十分大きな正定数) より，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u_\theta, u_\theta) &= -C(\theta) + \mathcal{B}_{(\theta F)_1}(u_\theta, u_\theta) + \mathcal{A}_\mu(u_\theta, u_\theta) \\ &\le -C(\theta) + C\theta \int_{\mathbb{R}^d} u_\theta^2 d\mu_F + \int_{\mathbb{R}^d} u_\theta^2 d\mu\end{aligned}$$

がわかる．(2.3) より，上式の右辺は

$$-C(\theta) + (C\theta + 1)\epsilon\mathcal{E}(u_\theta, u_\theta) + (C\theta + 1)M(\epsilon).$$

以下である．数列 $\{\theta_n\}$ を $\theta_n \downarrow \theta_0$ を満たすものとする．上式の θ に θ_n を代入すると，ϵ を十分小さくとれば，

$$\begin{gathered}\mathcal{E}(u_{\theta_n}, u_{\theta_n}) \le -C(\theta) + (C\theta + 1)\epsilon\mathcal{E}(u_{\theta_n}, u_{\theta_n}) + (C\theta + 1)M(\epsilon) \\ \iff \mathcal{E}(u_{\theta_n}, u_{\theta_n}) \le \frac{-C(\theta_n) + (C\theta_n + 1)M(\epsilon)}{1 - (C\theta_n + 1)\epsilon}\end{gathered}$$

を得る．故に，$\lim_{n\to\infty} C(\theta_n) = 0$ なので，

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_{\theta_n}, u_{\theta_n}) = \frac{(C\theta_0 + 1)M(\epsilon)}{1 - (C\theta_0 + 1)\epsilon} < \infty \tag{6.4}$$

となる．

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}^{\theta_0(\mu+F)}(u_{\theta_n}, u_{\theta_n}) + C(\theta_n)| &= |\mathcal{E}^{\theta_0(\mu+F)}(u_{\theta_n}, u_{\theta_n}) - \mathcal{E}^{\theta_n(\mu+F)}(u_{\theta_n}, u_{\theta_n})| \\ &\le Ce^{\theta_0\|F\|_\infty}(\theta_n - \theta_0) \int_{\mathbb{R}^d} u_{\theta_n}^2 d\mu_F \\ &\le Ce^{\theta_0\|F\|_\infty}(\theta_n - \theta_0)\|G\mu_F\|_\infty \mathcal{E}(u_{\theta_n}, u_{\theta_n})\end{aligned}$$

がわかり，(6.4) より，

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}^{\theta_0(\mu+F)}(u_{\theta_n}, u_{\theta_n}) = 0 \tag{6.5}$$

である．h を §4 で構成した $\mathcal{H}^{\theta_0(\mu+F)}$-調和関数とし，$(\mathcal{E}^{\theta_0(\mu+F),h}, \mathcal{F}^{\theta_0(\mu+F)})$ を Doob の h-変換された Dirichlet 形式とする．そのとき，(6.5) は

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}^{\theta_0(\mu+F),h}\left(\frac{u_{\theta_n}}{h}, \frac{u_{\theta_n}}{h}\right) = 0$$

と同値である．

ψ と $L(u)$ を定理6.2で定義したものとする．そのとき，

$$\begin{aligned}\left|L\left(\frac{u_{\theta_n}}{h}\right)\right| &= \int_{\mathbb{R}^d} u_{\theta_n}(x)\psi(x)h(x)dx \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} u_{\theta_n}^2 dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} \psi^2(x)h^2(x)dx} < \infty\end{aligned}$$

であるから，$\{\theta_n\}$ のある部分列を取れば，$L(u_{\theta_n}/h)$ は収束する．その収束部分列をあらたに $\{\theta_n\}$ とおくことにする．そのとき，定理6.2より，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |u_{\theta_n} - Ch| ghdx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left|u_{\theta_n} - hL\left(\frac{u_{\theta_n}}{h}\right)\right| dxghdx + \int_{\mathbb{R}^d} \left|hL\left(\frac{u_{\theta_n}}{h}\right) - Ch\right| ghdx \\ &\leq C\mathcal{E}^{\theta_0(\mu+F)}(u_{\theta_n}, u_{\theta_n})^{1/2} + \int_{\mathbb{R}^d} \left|L\left(\frac{u_{\theta_n}}{h}\right) - C\right| gh^2dx \to 0 \text{ as } n \to \infty.\end{aligned}$$

を得る．よって，$\lim_{n\to\infty} u_{\theta_n} = Ch$ m-a.e. としてよい．$\mathcal{H}^{\theta_0(\mu+F)}$ が零再帰的であることと $d \leq 2\alpha$ であることは同値であったので Fatou の補題より，

$$1 = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_{\theta_n}^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} u_{\theta_n}^2 dx = C^2 \int_{\mathbb{R}^d} h^2 dx \tag{6.6}$$

となり，零再帰性と (6.6) より $h = 0$，すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} u_{\theta_n} = 0, \quad m\text{-a.e.} \tag{6.7}$$

となることがわかる．$h > 0$ なので，"$\mathcal{E}^{\theta_0(\mu+F),h}$-q.e." と "$\mathcal{E}$"-q.e. は同値である．それゆえに，(6.5) と (6.7)，そして [21, Lemma 6.1] を組み合わせれば，$u_{\theta_n} \to 0$ q.e. を得る．

u_{θ_n} は $C(\theta_n)$ に対応する固有関数であったから，

$$u_{\theta_n} = e^{-C(\theta_n)t} p_t^{\theta_n(\mu+F)} u_{\theta_n}$$

となり，超縮小性 [1 Theorem 6.1 (iii)] より，

$$\|u_{\theta_n}\|_\infty \leq e^{-C(\theta_n)t} \|p_t^{\theta_n(\mu+F)}\|_{2,\infty} \leq \|p_t^{\theta_1(\mu+F)}\|_{2,\infty} < \infty$$

がわかる．したがって，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_{\theta_n}^2 d\nu &= \limsup_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} u_{\theta_n}^2 1_{B(R)} d\nu + \int_{\mathbb{R}^d} u_{\theta_n}^2 1_{B_R^c} d\nu\right) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_{\theta_n}^2 1_{B_R} d\nu + \limsup_{n\to\infty} \|G(1_{B_R^c}\nu\|_\infty \mathcal{E}(u_{\theta_n}, u_{\theta_n}) \\ &\leq \|G(1_{B_R^c}\nu)\|_\infty \frac{(C\theta_0 + 1)M(\epsilon)}{1 - (C\theta_0 + 1)\epsilon}\end{aligned}$$

となり，$R \to \infty$ とすれば証明は終わる．

□

以上の定理と Gärtner-Ellis の定理を用いれば，定理 1.1 を得る．

実は $d > 2\alpha$ のときには次の結果も得られるのであるが，ここではその証明は割愛する．証明法は [21] と [22] を参照していただきたい．

定理 6.5. 仮定は定理 *6.3* と同じとする．$d > 2\alpha$ のとき，$C(\theta)$ は微分不可能である．

7 これからの問題

スペクトル関数の微分可能性から加法的汎関数の大偏差原理を得ようとするときに，非局所的な Schrödinger 作用素に関するポテンシャル論的性質が大変重要となったのが興味深い．そこで，これからの問題として次のようなものが考えられる．

1. 基礎となる対称 Markov 過程をどこまで拡張できるのか．
2. 対称 Markov 過程から生成される拡張された Dirichlet 空間から $L^2(\mu)$，($\mu \in \mathcal{K}_\infty$) への埋め込みがコンパクトになる場合とならない場合の限界はどこか．それともすべての対称 Markov 過程に関してこのような埋め込みはコンパクトであるのか．
3. 対称 Markov 過程の状態空間が高次元の場合の加法的汎関数の大偏差原理は成り立つのか．
4. 状態空間をユークリッド空間にしているが，これを別の空間に変えられないか．

参考文献

[1] Albeverio, S., Blanchard, P., Ma, Z.M.: Feynman-Kac semigroups in terms of signed smooth measures, in "Random Partial Differential Equations" ed. U. Hornung et al., Birkhäuser, (1991).

[2] Bass, R.F., Levin, D.A. : Harnack inequalities for jump processes, Potential Anal., **17**, 375-388, (2002).

[3] Carmona, R., Masteur, W., Simon, B.: Relativistic Schrödinger operators: Asymptotic behavior of the eigenfunctions, J. Funct. Anal. **91**, 117-142, (1990).

[4] Chen, Z.-Q., Gaugeability and conditionanl gaugeability, Trans. Amer. Math. Soc. **354**, 4639–4679, (2002).

[5] Chen, Z.-Q., Analytic characterization of conditional gaugeability for non-local Feynman-Kac transforms, J. Funct. Anal. **202**, 226–246, (2003).

[6] Davies, E.B., One Parameter Semigroup, London Mathematicla Society Monographs, Academic, Press, (1980).

[7] Dembo, A., Zeitouni, O.,: Large deviation techniques and applications, Second edition, Applications of Mathematics **38**, Springer-Verlag, New York, (1998).

[8] Fukushima, M., Oshima, Y., Takeda, M.: Dirichlet forms and Markov processes, Walter de Gruyter, (1994).

[9] Kato, T.: Perturbation theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1984).

[10] Oshima, Y.: Potential of recurrent symmetric Markov processes and its associated Dirichlet spaces, in Functional Analysis in Markov Processes, ed. M. Fukushima, Lecture Notes in Math. **923**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1982).

[11] Pinsky, R.G.: Positive Harmonic Functions and Diffusion, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **45**, Cambridge University Press, (1995).

[12] Revuz, D., Yor, M.: Continuous Martingales and Brownian Motion, 3rd. edition, Springer, New York, (1998).

[13] Stollman, P., Voigt, J.: Perturbation of Dirichlet forms by measures, Potential Anal. **5**, 109-138, (1996).

[14] Takeda, M.: Asymptotic properties of generalized Feynman-Kac functionals, Potential Analysis, **9**, 261-291, (1998).

[15] Takeda, M.: Conditional gaugeability and subcriticality of generalized Schrödinger operators, J. Funct. Anal. **191**, 343-376, (2002).

[16] Takeda, M.: Large deviation principle for additive functionals of Brownian motion corresponding to Kato measures, Potential Analysis, **19**, 51-67, (2003).

[17] Takeda, M.: L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger type semigroups. J. Funct. Anal. **252**, 550–565, (2007).

[18] Takeda, M.: A large deviation principle for symmetric Markov processes with Feynman-Kac functional, J. Theoret. Probab., 21, 336–355, (2008).

[19] Takeda, M., Tawara, Y.: L^p-independence of spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups, to appear in Forum Math (2008).

[20] Takeda, M., Tsuchida, K.: Criticality of generalized Schrödinger operators and differentiability of spectral functions, Advanced Studies in Pure Mathematics **41**. Math. Soc. of Japan, Tokyo, 333-350, (2004).

[21] Takeda, M., Tsuchida, K.: Differentiability of spectral function for symmetric α-stable processes, Trans. Amer. Math. Soc. **359**, 4031-4054, (2007)

[22] Takeda, M., Tsuchida, K.: Large deviations for discontinuous additive functionals of symmetric stable processes, to appear in Math. Nachr., (2009).

[23] Takeda, M., Uemura, N.: Subcriticality and gaugeability for symmetric α-stable processes, Forum Math. **16**, 505-517, (2004).

[24] Tawara, Y.: L^p-independence of growth bounds of generalized Feynman-Kac semigroups, Ph.D. thesis, Tohoku University, (2009).

[25] Tsuchida, K.: Differentiability of spectral functions for relativistic α-stable processes with application to large deviations, Potential Analysis, **28** (1), 17-33, (2008).

[26] Watanabe, S.: On discontinuous additive functionals and Levy measures of a Markov process, Japan. J. Math. **34**, 53-70, (1964).